Title	Boolean Valued Combinatorics (数学基礎論)
Author(s)	難波, 完爾
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 362: 166-185
Issue Date	1979-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/104549
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
362巻 1979年 166-185

Boolean valued combinatrics

東大　教養　　難波完爾

自然数の全体 N とか実数の全体 R（連続体，continuum）の個数（基数，濃度，cardinality）に対する素朴な問題，即ち G. Cantor の連続体仮説"すべての集合 A に対して

$$\overline{\overline{N}} \leq \overline{\overline{A}},\ \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{R}} \rightarrow \overline{\overline{R}} \leq \overline{\overline{A}},\ \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{N}}$$

は成立するか"，又同じことであるが無限基数の標準的列

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots$$

に対して $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ なる $2^{\aleph_0} = \overline{\overline{R}}$ がどこに位置するかの仮説

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

については，Cantor 自身，そして後には Lusin 等によっても深く研究されたが，その証明可能性に対する具体的結果は K. Gödel によって得られた．即ち

"連続体仮説の否定を証明することは出来ない"

であり，これは勿論，次のことゝ同じである．

"連続体仮説を仮定しても矛盾しない"

そして 1963 年に至って，逆方向の決定的結果が P. J. Cohen

によって証明された．即ち

"連続体仮説の否定を仮定しても矛盾しない"

というのである．これらによって連続体仮説はその肯定も否定も Zermelo-Fraenkel の集合論の公理から証明出来ないことが知られるに至ったのであるが，実際にそれが"正しい"かどうかは未知のまゝである．

さて，その後 R. M. Solovay と D. Scott によって P. J. Cohen の用いた"forcing"の概念が代数的に明確に記述された．即ち

"complete Boolean algebra とその dual space"

である．勿論 dual space の元とは $h : B \to 2$ への homomorphism のことである．これらの概念を用いて，一般に，場合によっては無意識に用いられている，論理体系とその公理．即ち

古典述語論理

Zermelo-Fraenkel の集合論

についての性質をより明確に記述し得たといってよいと思う．

少しくどいのであるが，一応 Zermelo-Fraenkel の集合論の公理を記しておく．これは例えば category の全体の category CAT 等のものは除いて，その中ではかなり自由に数学を展開できるもので，公理もある程度素朴な形を保っている．

Extensionality（外延性）

$$\forall x \in a (x \in b),\ \forall x \in b (x \in a) \longrightarrow a = b$$

Pair（対集合）　$\{a, b\}$

$$\exists c\, \forall x (x \in c \equiv x = a \vee x = b)$$

Sum（和集合）　$\bigcup a$

$$\exists b\, \forall x (x \in b \equiv \exists y \in a (x \in y))$$

Power（巾集合）　$\mathfrak{P}(a)$

$$\exists b\, \forall x (x \in b \equiv \forall y \in x (y \in a))$$

Empty set（空集合）　ϕ, 0

$$\exists a\, \forall x (\neg x \in a)$$

Infinity（無限公理）

$$\exists a (0 \in a \wedge \forall x \in a (x+1 \in a))^{1)}$$

Comprehension（分出公理）, Sub set（部分集合）

$$\exists b\, \forall x (x \in b \equiv x \in a \wedge P(x))$$

Replacement（置換公理）

$$\forall x \in a\, \exists y\, P(x, y) \equiv \exists y\, \forall x \in a\, \exists z \in y\, P(x, z)$$

Foundation（基礎公理）, Induction（帰納法）

$$\exists x\, P(x) \longrightarrow \exists x (P(x) \wedge \forall y \in x\, \neg P(y))$$

$$\forall x (\forall y \in x\, P(y) \rightarrow P(x)) \longrightarrow \forall x\, P(x)^{2)}$$

Axiom of choice（選択公理）

$$\forall x \in a\, \exists y\, P(x, y) \equiv \exists y\, \forall x \in a\, P(x, y(x))$$

---

1) $x+1 = x \cup \{x\}$, $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$　2) 互に対偶.

通常ZFと記せばAxiom of choice（AC）を除いた上記公理を意味しZFCはACを含めた時の名称である．

BをBoolean algebraとする．即ち

$$a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

$$a+(b\cdot c)=(a+b)(a+c) \qquad a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$a+(b\cdot -b)=a \qquad a(b+-b)=a$$

を満足するものとする．Bには自然な順序

$$a\le b \equiv ab=a \equiv a+b=b$$

があり，Bの任意の部分集合Aが最小上界pを有すとき，即ち

$$\forall x\in A\ (x\le p)$$

$$\forall y\,(\forall x\in A\,(x\le y)\to p\le y)$$

が成立するときBは完備ブール代数（complete Boolean algebra）といい最小上界を

$$\sum A \qquad \sup_{x\in A} x$$

等と記する．完備ブール代数の代表的な例は：

1．位相空間Xの正則開集合[1)]の全体．それは開集合をnowhere dense setの全体のIdealで割った商代数でもある．

2．Borel集合族$\mathbb{B}$上のσ-finiteな測度μに対して，それをμ測度0のIdealで割った商代数．

---

1) $\mathrm{int}\,\overline{A}=A$

完備ブール代数の中で最も簡単なものは真1，偽0の2元より成るもので

$$2 = \mathcal{P}(1) = \{0,1\}$$

であり，すべての完備ブール代数の部分代数である．

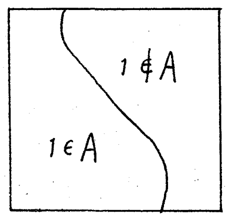
Solovay-Scott の考え方は

"集合と表現函数の同一視"

であって，$A \subset X$ をその表現函数

$$f_A(x) = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{if} & x \in A \\ 0 & \text{if} & x \notin A \end{matrix}\right\} = \|x \in A\| \in 2$$

で表現されていると考えれば，$\mathcal{B}$ を完備ブール代数として，$x \in A$ の真偽値 $\|x \in A\|$ としては $\mathcal{B}$ の元のどれも可能と考えたのである．例えば下の図では通常の測度で $1 \in A$ も $1 \notin A$ もほゞ $\frac{1}{2}$ の確率を有し互に背反なものと考えている．



集合論では集合を元とする集合を可能な限り考える．このことに対応して表現函数の方では，表現函数の集合で定義され $\mathcal{B}$ の値を有する函数を可能な限り考えることを意味する．これは帰納法によって次のように定義される．即ち

$$u \in V^{(\mathcal{B})} \equiv u ; V^{(\mathcal{B})} \longrightarrow \mathcal{B}$$

を満足する最小な class（類）ということである．即ち

$$u \in U \equiv u; U \longrightarrow B$$

ここに $u; U \longrightarrow B$ は U の一部分から B への写像の意味である．

上記性質を有すれば

$$V^{(B)} \subset U$$

というのが帰納法といった意味である．

集合論の二つの基本的述語記号 $=$ ，$\in$ については，

$$u = v \equiv \forall x \in u (x \in v) \wedge \forall x \in v (x \in u)$$

$$u \in v \equiv \exists x \in v (x = u)$$

にならって，$V^{(B)}$ の元 u，v についての帰納法で

$$\|u = v\| = \prod_{x \in dom(u)} (u(x) \Rightarrow \|x \in v\|) \cdot \prod_{x \in dom(v)} (v(x) \Rightarrow \|x \in u\|)$$

$$\|u \in v\| = \sum_{x \in dom(v)} (v(x) \cdot \|x = u\|)$$

と定義する．ここに $\Rightarrow$ は論理記号〝ならば〟に対応するもので $a \Rightarrow b = -a + b$ であり，or，$+$ が和，and，$\cdot$ が積，implies，$\Rightarrow$ は指数に対応し，例えば $a \Rightarrow b$ を b^a のように記せば $(a \Rightarrow b)(c \Rightarrow b) = (a + c \Rightarrow b)$ のような指数の法則を満足する．

これらは例えば

$$b^a b^c = b^{a+c} \qquad (a^b)^c = a^{bc} \qquad (ab)^c = a^c b^c$$

ここで，この体系に対する基本的性質を記しておく

1. 古典述語論理で証明可能な論理式はすべて値1を有する即ち"正しい".

2. 等号に関する公理

$$u_1 = v_1, \cdots, u_n = v_n, A(u_1, \cdots, u_n) \longrightarrow A(v_1, \cdots, v_n)$$
$$\longrightarrow u = u$$

が成立する.

3. 束縛された論理記号に対して

$$\| \exists x \in u\, A(x) \| = \sum_{x \in dom(u)} u(x) \| A(x) \|$$

が成立する.

4. maximum principle (最大値定理)

$V^{(B)}$ の元 u が存在して

$$\| \exists x A(x) \| = \sum_{x \in V^{(B)}} \| A(x) \| = \| A(u) \|$$

が成立する.

5. conditional maximum principle (条件付最大値定理)

$\| \exists x B(x) \| = \| B(u) \|$ で $\| \exists x\, B(x) \wedge A(x) \| = \| A(u) \|$

となる $V^{(B)}$ の元 u が存在する.

6. ZFC の公理はすべて $V^{(B)}$ の中で"正しい"即ち値1を有する.

したがって, ZFC より等号に関する公理を用いて古典述語

論理で，要するに普通に，証明可能な論理式は値1を有する．したがって，適当な B について $V^{(B)}$ の中で $\|A\|<1$ であればZFCから証明出来ないのである．例えば

$$2=\{0,1\}$$

の元に $\frac{1}{2}$ ずつの確率を与えた空間の $\aleph_2$ 個の直積の上の測度から作られる完備ブール代数 B については

$$\|2^{\aleph_0}=\aleph_2\|=1$$

が正しくなってしまうのである．

さて1～6等の証明には，α を順序数として

$$\sum_{p<\alpha} a_p = \sum_{p<\alpha}\left(a_p - \sum_{q<p} a_q\right)$$

及び definition by cases（場合分け定義）が用いられる．即ち $(a_p \mid p\in A)$ を1の分解，即ち

$$\sum_{p\in A} a_p = 1 \qquad p\neq q \to a_p\cdot a_q = 0$$

とするとき，u_p の線型結合

$$u = a_p u_p$$

くわしくは $V^{(B)}$ の元として

$$dom(u) = \bigcup_{p\in A} dom(u_p)$$

$$u(x) = \sum_{x\in dom(u_p)} a_p\cdot u_p(x)$$

とすると，

$$a_p \leq \|u=u_p\|$$

が成立するのである．ここに用いられる $\|u=v\|$ が Kronecker や Dirack の δ に対応するもので，関係

$$\sum_u \|A(u)\|\|u=v\| = \|A(v)\|$$

$$\int f(x)\delta(x-y)\,dx = f(y)$$

の類似であることは注意すべき点である．

二つの完備ブール代数の間の complete な homomorphism に対する標準的分解

$$B_1 \xrightarrow{h} h(B_1) \xrightarrow{i} B_2$$

即ち h は projection，i は injection であって，これらに応じて

$$V^{(B_1)} \xrightarrow{h} V^{(h(B_1))} \xrightarrow{i} V^{(B_2)}$$

が帰納法によって自然に定められる．即ち

$$h(x) \in dom(h(u)) \equiv x \in dom(u)$$

$$h(u)(h(x)) = \sum_{\substack{h(x)=h(x') \\ x' \in dom(u)}} h(u(x'))$$

と定めれば，再び帰納法によって

$$\|h(u)=h(v)\| = h(\|u=v\|)$$

$$\|h(u)\in h(v)\| = h(\|u\in v\|)$$

等が成立する．h が projection であればこの拡大も projection であり，injection に対応しても同様である．h が projection，surjection なら

$$V^{(B_2)} = \{h(u) \mid u \in V^{(B_1)}\}$$

であるから，論理式の構成に関する帰納法で

$$h(\|A(u_1, \cdots, u_n)\|) = \|A(h(u_1), \cdots, h(u_n))\|$$

が証明出来るが，h が injection の場合は bounded formula，即ち $\forall x \in u$, $\exists x \in u$ の形の束縛記号のみ含む論理式について

$$h(\|A(u_1, \cdots, u_n)\|) = \|A(h(u_1), \cdots, h(u_n))\|$$

は成立するが，一般の論理式については交換可能性は必ずしも成立しない．そして，この性質の故に色々の独立性の証明が可能なのである．

例えば，和集合 $a = \bigcup b$ については

$$\forall x \in a\, \exists y \in b\, (x \in y) \wedge \exists y \in b\, \forall x \in y\, (x \in a)$$

で bounded であるが，巾集合　$a = \mathfrak{p}(b)$　については

$$\forall x \in a\, \forall y \in x\, (y \in b) \wedge \forall x\, (\forall y \in x\, (y \in b) \rightarrow x \in a)$$

であって，意味をそのまゝ素朴に記した表現では後半の $\forall x$ が bounded でない．

又，a が順序数であるという概念 $Ord(a)$ は

$$\forall x \in a\, \forall y \in x\, (y \in a) \wedge \forall x \in a\, \forall y \in x\, \forall z \in y\, (y \in x)$$

で bounded であるが，a が基数，又は initial number であること，即ち $Card(a)$ は

$$Ord(a) \wedge \forall x \in a\, \forall f : x \rightarrow a\, \exists y \in a\, \forall z \in x\, (f(z) \neq y)$$

であって $\forall f$ の部分は bounded でない．実際に適当な Boolean algebraによってboundedでないことが示される．さて簡単なことであるが少し注意しておくと，$a=\mathcal{P}(b)$とか$Card(a)$の中のboundedでないquantifierは両方とも$\forall$，即ちuniversalであって$\exists$，即ちexistentialではないが，これは偶然ではなくかなり多くの素朴な概念がunboundedな$\forall$のみを含む，これを"すべて"をΠになぞらえてΠ_1の性質と称している．又例えば集合aでその中で集合論の公理がすべて満足されるようなaの存在性などはunboundedな$\exists$を一つ含むので"exist"に対応する記号Σを用いてΣ_1の性質と称している．又，例えばmeasurable cardinalの存在，即ち集合xの中集合$\mathcal{P}(x)$で定義された可算加法的測度$\mu : \mathcal{P}(x) \to \{0,1\}$でsingletonの上で0となるもの，即ち$\mu(\{\nu\}) = 0$の存在等は$\exists x \forall y\, P(x,y)$の形の論理式で表現され$\Sigma_2$の性質と呼ばれている．したがって，これらの概念は完備ブール代数の選択によってかなり自由に意味が変化し得るのである．

このように論理式の形に注目するときにはZFCの公理も仲々興味深い．例えば置換公理

$$\forall x \in a\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \forall x \in a\ \exists z \in y\ P(x,z)$$

とかaxiom of choice

$$\forall x \in a\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \forall x \in a\ P(x, y(x))$$

等はuhboundedな束縛記号を保ちながらboundedな束縛記号と

交換することを主張している．

さて標準的分解

$$V^{(B_1)} \xrightarrow{h} V^{(h(B_1))} \xrightarrow{i} V^{(B_2)}$$

に対して h は surjection であるから，真偽値は h と交換可能であって，証明可能性とか独立性に関してはさしあたり興味がない．そこで $V^{(h(B_1))} \xrightarrow{i} V^{(B_2)}$ の部分に注意する．

特に $2 \subset B$ であるので

$$\vee : V = V^{(2)} \longrightarrow V^{(B)}$$

について考えてみよう．勿論 V と $V^{(2)}$ の自然な関係は

$$\check{a} \in dom(\check{b}) \equiv a \in b$$

$$\check{b}(\check{a}) = 1$$

と定めるのが自然である．

1の分解と $V^{(2)}$ の元について少し記しておく．今

$$\| u \in V^{(2)} \| = 1$$

とすると

$$\| u \in V^{(2)} \| = \| \exists x \in V^{(2)} (u = x) \| = \sum_{x \in V} \| \check{x} = u \|$$

であり $\| u = \check{x} \| \| u = \check{y} \| \leq \| \check{x} = \check{y} \|$ であるから $x \neq y$ なら $\| \check{x} = \check{y} \| = 0$

よって $v(x) = \| u = \check{x} \|$ は集合

$$b = \{ x \mid \| u = \check{x} \| > 0 \}$$

を index にもつ1の分解であり，又逆に標準的一次結合

$$w = \sum_{x \in b} v(x) \check{x}$$

は $\check{b}$ の元を意味している．

b 上の B-valued vector と $V^{(B)}$ の元については $\| u \subset \check{b} \| = 1$ とすると $\| \check{x} \in u \| = v(x)$ 　$(x \in b)$ は b 上の vector であり，又このような v は $\check{b}$ の部分集合を決定するので

"b 上の B-値 vector は $\check{b}$ の subset"

である．勿論，共通部分には成分各の積が，そして空であることは長さ $\sum v(x) = 0$，空でないことは $\sum v(x) = 1$，又互に素であることには，内積 $\sum v_1(x) v_2(x) = 0$．即ち直交性が対応している．同様にして

"(ab) 型の B-値 matrix は $\check{a} \times \check{b}$ の relation"

を意味しており．u，v をそれぞれ $(a\,b)$，$(b\,c)$ 型の matrix とするとき，その積

$$uv(x,z) = \sum_{y \in b} u(x,y) v(y,z)$$

は二つの関係の積に対応している．

次に，函数 $f : \check{a} \to \check{b}$ についても，その graph を考えれば

domain : 　　$\| \forall x \in \check{a}\ \exists y \in \check{b}\ (\langle y\, x \rangle \in f) \| = 1$

uniqueness : $\| \forall x \in \check{a}\ \forall y_1, y_2 \in \check{b}\ (\langle y_1\, x \rangle \in f \wedge \langle y_2\, x \rangle \in f \to y_1 = y_2 \| = 1$

であるから $u(y,x) = \| \langle \check{y}\, \check{x} \rangle \in f \|$ とすると

$$\sum_{y \in b} u(y,x) = 1 \qquad (x \in a)$$

$$\sum u(y_1, x)\, u(y_2, x) = 0 \qquad (y_1 \neq y_2)$$

であり，上式は行ベクトルの長さ 1 で，下式は列ベクトルが

互に直交することを意味している.

surjection : $\| \forall y \in \check{b}\ \exists x \in \check{a}\ (\langle y\, x \rangle \in f) \| = 1$

injection : $\| \forall y \in \check{b}\ \forall x_1, x_2 \in \check{a}\ (\langle y\, x_1 \rangle \in f \wedge \langle y\, x_2 \rangle \in f \rightarrow x_1 = x_2) \| = 1$

は,列ベクトルの長さ 1 ,行ベクトルが互に直交することを意味している.したがって bijection は unitary matrix に対応している.しかし,例えば provability measure μ によって作られた完備ブール代数として $u(y\,x)$ が x , y について independent とすれば,一般には disjoint ではないので B 値の unitary matrix $u(y, x)$ から,実数値の matrix $(\mu(u(y, x)))$ を作っても unitary とは限らない.

この様な立場から素朴な性質について少しふれておこう.

1 . Box argument (pigeon hole principle)

$(n\,n)$ 型の行列 u ,その転置 u^* について

$$u^* u = 1_n \equiv u u^* = 1_n$$

2. Axiom of choice

$$\exists u : a \xrightarrow{\text{onto}} b \longrightarrow \exists v : b \xrightarrow{1\text{-}1} a \ (uv = 1_b)$$

に対しては, $u^* u \geq 1_a$, $u u^* = 1_b$ に対して

$$v v^* \leq 1_a , \ v^* v = 1_b , \ uv = 1_a$$

なる v が存在することを意味している.

3 . Cantor-Bernstein theorem

$$\exists u : a \xrightarrow{1\text{-}1} b , \ \exists v : b \xrightarrow{1\text{-}1} a \longrightarrow \exists w : a \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} b$$

この意味は，ある u，v に対して

$$u^* u = 1_a \qquad u u^* \leq 1_b \qquad v^* v = 1_b \qquad v v^* \leq 1_a$$

が成立すれば，ある w に対して

$$w^* w = 1_a \qquad w w^* = 1_b$$

となる．具体的にはその証明にしたがって

$$w = \sum_{n\in\omega} (vu)^n (\check{a} - v\check{b}) \cdot u + \sum_{n\in\omega} v(uv)^n (\check{b} - u\check{a}) \cdot v^* + \prod_{n\in\omega} (vu)^n \check{a} \cdot u$$

4．Cantor の定理　$\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{2^a}}$

$f : a \longrightarrow p(a)$ には自然に $(a\ a)$ 型の正方行列が対応している．

いわゆる orthogonal argument は

$$v(x) = -u(x, x)$$

なる vector を考えることで，symmetric difference を用いて

$$\| u \neq v \| = \| \exists x \in \check{a}\ (u(x) \not\Leftrightarrow v(x)) \| = \sum_{x\in a} ((u(x) - v(x)) + (v(x) - u(x)))$$

であるから．すべての $x \in a$ に対して

$$\sum_{y\in a} v(y) - u(x, y) \quad + \sum_{y\in a} u(x, y) - v(y) \quad = 1$$

なることを意味している．

$\check{a}$ の元は a を index とする 1 の分解，その部分集合は a 上の B 値 vector であるから $V^{(B)}$ の中ではそれらの基数は異なることを意味している．勿論，例えば [0 1] の regular open set から成る B に対しては，ω 上の 1 の分解の全体は $2^{\aleph_0}$，又 ω 上の B 値 vector の全体も $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ で V の中では同一の基数を有している．

今まで $V^{(2)}$ の元の subset について述べて来たが，一般には次のようにすればよい．即ちよく知られているように，すべての集合はある基数と $1-1$ 対応する．よって

$$\sum_{Card(\alpha)} \|\check{\alpha} = \bar{\bar{u}}\| = 1$$

であり，基数の集合 $d = \{\alpha \mid \|\check{\alpha} = \bar{\bar{u}}\| > 0\}$ を index にする 1 の分解である．今 $b_\alpha = \|\check{\alpha} = \bar{\bar{u}}\|$ とすれば maximum principle により

$$b_\alpha = \|f : \check{\alpha} \xrightarrow[onto]{1-1} u\|$$

である．よって f が $1-1$, onto を用いて α 上の B-vector は f を通じて u の部分集合と $1-1$ に対応している．

同様に $u \times u$ 上の関係についても

$$w_f(x\ y) = \|(f(\check{x})\ f(\check{y})) \in w\|$$

を通じて $(\alpha\ \alpha)$ 型の matrix に対応している．又，他の g をもって $\|g : \check{\alpha} \xrightarrow[onto]{1-1} u\| = b_\alpha$ とすると，$\|f^{-1}g : \check{\alpha} \xrightarrow[onto]{1-1} \check{\alpha}\| = b_\alpha$ であるから $v = f^{-1}g$ は unitary．よって $f = vg$ である．又

$$w_g(x, y) = \|(g(\check{x})\ g(\check{y})) \in w\|$$

とすると，特に w_f，w_g が函数の時には，$g(\check{x}_1) = f(\check{x}_2)$，$g(\check{y}_1) = f(\check{y}_2)$ より $x_2 = f^{-1}g(x_1) = v(x_1)$，$y_2 = v(y_1)$ であるから；

$$w_g(x_2) = y_2 \quad \equiv \quad w_g(v(x_1)) = v(y_1) \quad \equiv \quad v^{-1}w_g v(x_1) = y_1$$

$$w_g(x_2) = y_2 \ \equiv \ w_f(x_1) = y_1$$

故に $w_f = v^{-1}w_g v$ となり unitary 同値である．このようにして任意の u の変換は基数による 1 の分解によって直和分解出来

その各成分は b_α 上での unitary 同値を除いて一意に定まる．

次に B-valued matrix と不変集合について少し記しておく．u を $(a\,a)$ 型の正方行列 x を vector として

$$u x = \lambda x$$

を考える．この内容は

$$\lambda \le \| u x = x \|$$

であって，$\check{a}$ の部分集合の関係 u による像がもとの集合を不変にすることを意味している．即ち

$$\lambda \le \| \forall x \in \check{a}\, (x \in x \equiv \exists y \in x((x\,y) \in u)) \|$$

である．このような不変部分空間の意味を考えてみよう．今 $u x \subset x$ とする．例えば $\check{a} = x$ 等はこの例である．さて $V^{(B)}$ の中で帰納法を用いて

$$u^{\alpha+1} x = u u^\alpha x \qquad u^\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} u^\beta x$$

とすると，$V^{(B)}$ の中で $u^\alpha x$ は $\check{a}$ の単調な部分集合の列であるので，ある順序数に対して

$$u u^\alpha x = u^{\alpha+1} x = u^\alpha x$$

となる．故に $u^\alpha x$ は provability 1 で固有 vector 即ち不変集合である．$u^\alpha \check{a}$ は不変集合の中では最大のものであるが $u^\alpha \check{a} = 0$ も可能であって，この場合 u の固有 vector は 0 のみであって nilpotent と呼ばれる．

さて，空でない不変空間の性質を調べてみよう．

$$\forall x \in \check{a}\,(x \in \divideontimes \equiv \exists y \in \divideontimes\,((xy) \in u))$$

の意味は $\divideontimes \subset \check{a}$ の下では

$$\forall x \in \divideontimes\ \exists y \in \divideontimes\,((xy) \in u)$$

$$\forall x \in \check{a}\ \forall y \in \divideontimes\,((xy) \in u \rightarrow x \in \divideontimes)$$

の両方が成立することであって，上式は $(xy) \in u$ を $x >_u y$ と記すことにすれば，$x \in \divideontimes$ に対して

$$x >_u x_1 >_u x_2 >_u x_3 >_u \cdots$$

となる無限下降列がある．即ち well-founded でない．又下式は

$$\forall x \in \divideontimes\,(x <_u y \longrightarrow y \in \divideontimes)$$

である．今

$$\divideontimes = \{x \in \check{a} \mid x \text{ は well-founded でない}\}$$

とすれば，これは $\forall x \in \divideontimes\,(x <_u y \longrightarrow y \in \divideontimes)$ を自然に満足するので，これが最大の不変集合で，互に素な集合への分解

$$\check{a} = u^{\alpha}\check{a} + \{x \in \check{a} \mid x \text{ is well-founded}\}$$

は，前者で u は不変，後者では nilpotent であり．well-founded であるから一つの順序数が対応するが，それが $x \in u^{\alpha}\check{a} - u^{\alpha+1}\check{a}$ なる α である．

さて，無限下降列 $d = x >_u x_1 >_u x_2 >_u \cdots$ に対して，その transitive closure は

$$\sum_{n \in \omega} u^n d$$

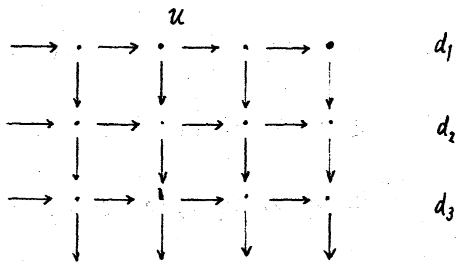
である．よって $ud \supset d$ を用いると，

$$u\Big(\sum_{n\in\omega} u^n d\Big) = \sum_{n\in\omega} u^{n+1} d = \sum_{n\in\omega} u^n d$$

となり d を含む最小の不変集合である．しかし一般には

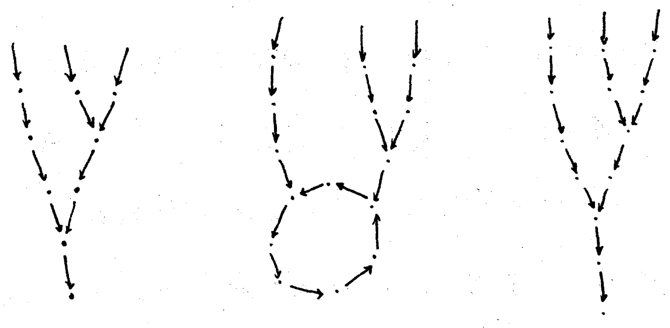
$$T(d) = \sum_{n\in\omega} u^n d$$

は既約な（極小な）不変集合ではない

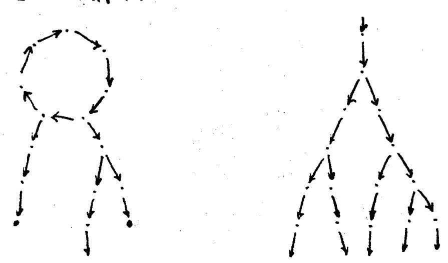


明らかに $T(d)$ の任意個数の和は再び不変集合であるが $T(d_1) \cap T(d_2)$ は一般には不変集合でない．

簡単な例をとってみよう．u が一価のときは図のようなも

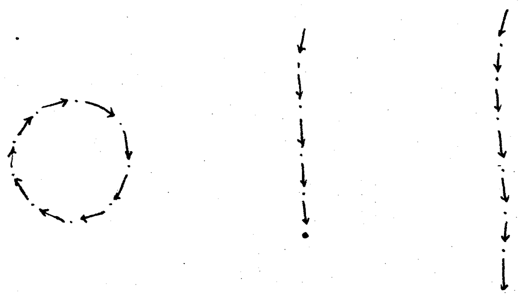


のであって $T(d)$ は各 branch であって，それらは既約である．
u が高々可算の多価性を有するときは a^* は可算な不変集合の和である．又 u の逆の関係 u^* が一価であれば，図のようなも



のであって，各 $T(d)$ は既約であって，異なるものは互に素である．即ち最大固有空間は既約成分の直和である

特に u，u^* が共に一価であれば有限の loop 又は string の直和に分解する．



又，他の極端な場合，即ち u が対称なときは二元が結べるかどうかで，いわゆる連結成分に分解する．この場合も勿論既約成分の直和である．